1 Fourier Analyse

1.1 Harmonische Schwingung

Eine (ungedämpfte) Schwingung ist eine sich mit der Periodendauer T wiederholende Funktion.

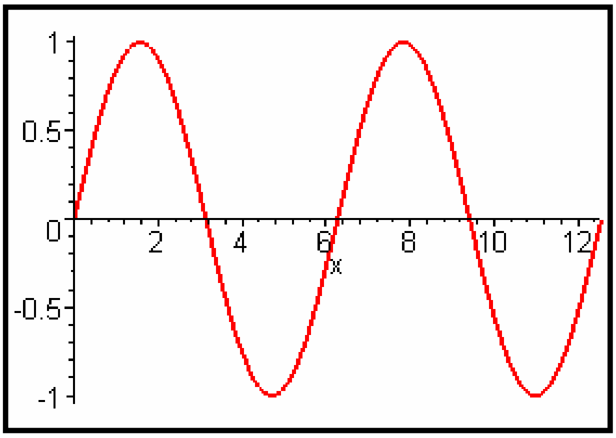
$$f(t) = f(t+T) \tag{1.1}$$

T: Periodendauer
t: Zeit

Eine Harmonische Schwingung ist eine solche Schwingung, die nur eine Frequenz hat. Das heisst ohne Oberwellen und dergleichen. Sie wird Folgendermassen dargestellt:

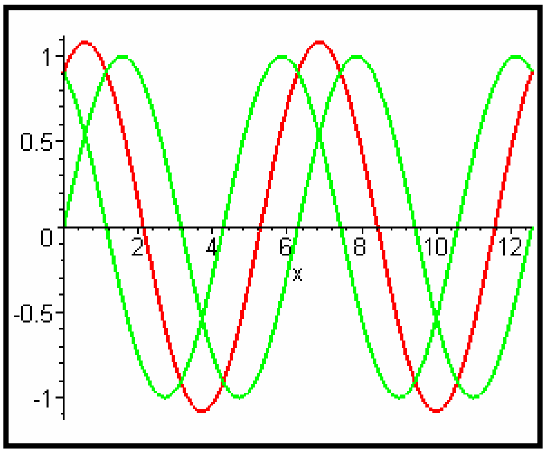
$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \tag{1.2}$$

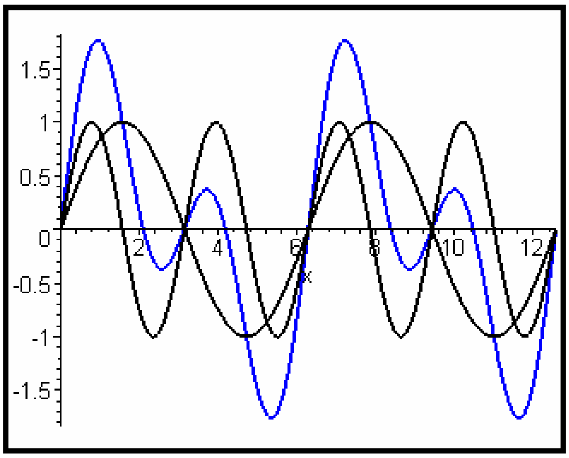
A: Amplitude
ω: Kreisfrequenz $\varpi = \frac{2\pi}{T}$
φ: Phasenverschiebung



1.2 Überlagerung von Harmonischen Schwingungen

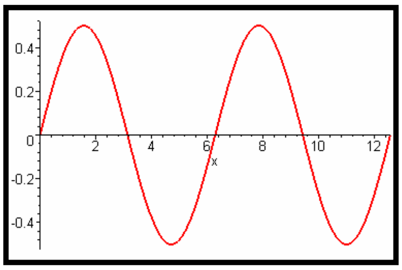
Überlagert man nun mehrere Harmonische Schwingungen so entsteht eine neue Schwingung. Haben die Schwingungen (grün Kurven) die gleiche Frequenz entsteht wieder eine Harmonische Schwingung (rot). Haben die zwei Ausgangskurven (schwarz) unterschiedliche Frequenzen so entsteht eine nicht harmonische Schwingung (blaue Kurve).



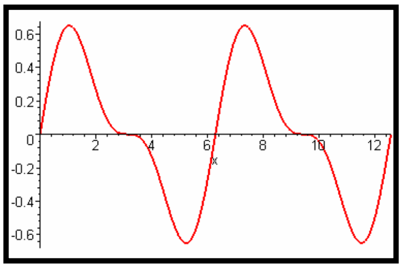


Diese Eigenschaft kann man sich zu Nutze machen um andere Periodischen Funktionen zu beschreiben:

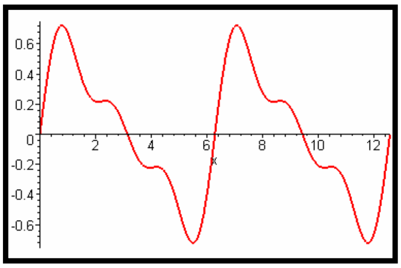
$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \sin(k \cdot x)}$$



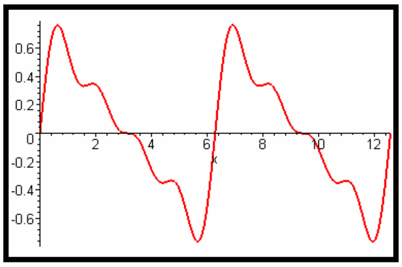
n=1



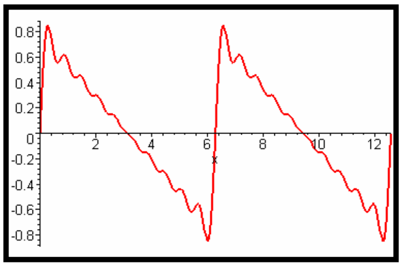
n=2



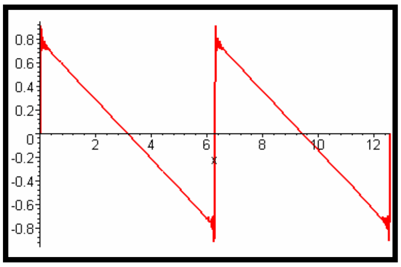
n=3



n=4



n=10



n=100

1.3 Die Fourierreihe

Jean Baptiste Joseph Fourier hat herausgefunden, dass man jede periodische Funktion als eine Summe von Harmonischen Schwingungen darstellen kann, es treten dabei nur ganzzahlige vielfache der Grundfrequenz auf. Man nennt diesen Vorgang Fourieranalyse oder harmonische Analyse.

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)\right] \tag{1.3}$$

In dem man $x = \omega t$ setzt erhält man eine 2π -periodische Funktion womit die Gleichung in

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x)\right] \tag{1.4}$$

übergeht.

Es gilt weiter:

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\,x)dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \cos(k\,x)dx = 0 \tag{1.5}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\,x)\sin(m\,x)dx = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad k \neq m \\ \pi & \textit{für} \quad k = m \end{cases} \qquad \text{siehe 2} \tag{1.6}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\,x)\cos(m\,x)dx = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad k \neq m \\ \pi & \textit{für} \quad k = m \end{cases} \tag{1.7}$$

1.4 Berechnung des Fourierkoeffizienten a_0

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x)]$$

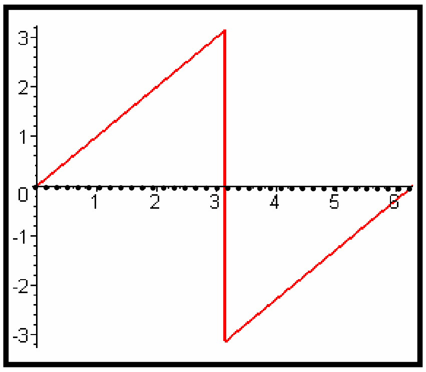
Das konstante Glied der Gleichung kann folgendermassen Berechnet werden:

$$\int_0^{2\pi} f(x) = \int_0^{2\pi} a_0 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_0^{2\pi} \cos(k\,x) + b_k \int_0^{2\pi} \sin(k\,x) \right]$$
$$= a_0 2\pi$$

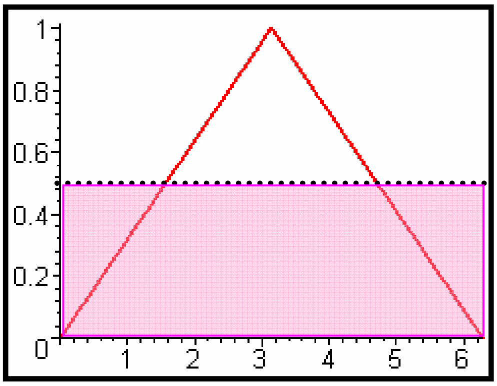
Nach dem umstellen der Gleichung erhält man für a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

a_0 kann unter Umständen direkt von der Grafik abgelesen werden. Im linken ist sie null, im rechten Beispiel ist die integrierte Fälche gleich einem Rechteck von 0.5·2π, teilen wir es durch die 2π unserer Formel erhalten wir das gesuchte konstante Glied.



$a_0 = 0$



$a_0 = 0.5$

1.5 Berechung des Fourierkoeffizienten a_k

Nimmt man nun

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(m\,x) + b_k \sin(m\,x) \right]$$

und multipliziert es mit $\cos(k\,x)$ und integriert anschliessend über eine Periode erhält man

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(k\,x)dx = \underbrace{a_0 \int_0^{2\pi} \cos(m\,x)}_{0} + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^{2\pi} \cos(m\,x)\cos(k\,x)dx}_{a_k\pi} + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_0^{2\pi} \sin(m\,x)\cos(k\,x)dx}_{0} = a_k\pi$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(k\,x) = a_k\pi \quad \Rightarrow \qquad \boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(k\,x)dx}$$

1.6 Berechung des Fourierkoeffizienten b_k

Analog zu a_k lässt sich b_k berechnen.

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(k\,x)dx}$$

1.7 Gerader und ungerader Funktionen

Ist die Funktion gerade also $f(x) = f(-x)$ wie dies bei cos(x) der Fall ist, muss nur a_k berechnet werden:

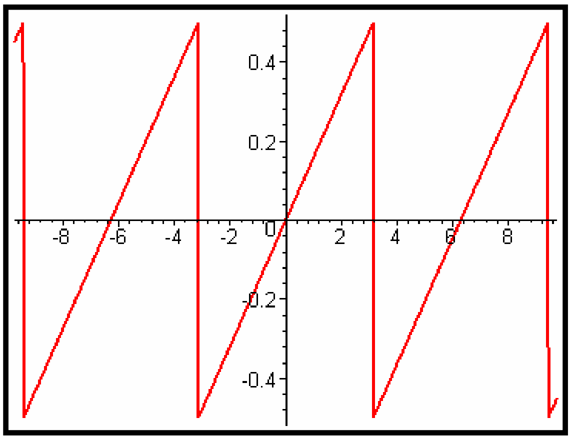
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(k\,x)dx \qquad b_k = 0$$

Ist die Funktion ungerade also $f(-x) = -f(x)$ wie dies bei sin(x) der Fall ist, muss nur b_k berechnet werden:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \qquad a_k = 0 \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(k\,x)dx$$

1.8 Beispiel

Nehmen wir die Sägezahn Funktion $f(x) = \frac{x}{2\pi} - round\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ welche im bereich von 0 bis 2π einer linearen Funktion entspricht. $f(x) = x$



k	a_k	b_k
1	0	4/1
2	0	-4/2
3	0	4/3
4	0	-4/4
5	0	4/5
6	0	-4/6
7	0	4/7
8	0	-4/8
9	0	4/9
10	0	-4/10

a_0=0 a_k=0 (weil Ungerade) $b_k = \frac{4\cdot(-1)^{1+k}}{k}$

2 Anhang

$$\left.\int_0^{2\pi} \sin(k\,x)\sin(m\,x)dx\right|_{m=k} = \int_0^{2\pi} \sin^2(k\,x) = \int_0^{2\pi} 1-\cos^2(k\,x) = \int_0^{2\pi} 1-\frac{1}{2}(1+\cos(2k\,x))$$

$$= 2\pi + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}(1+\cos(2k\,x)) = 2\pi + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2k\,x)$$

$$= 2\pi - \pi + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\cos(2k\,x) = \pi - \frac{1}{2}[\sin(2kx)]_0^{2\pi}$$

$$= \pi - \underbrace{\frac{1}{2}((\sin(2k2\pi) - \sin(0))}_{0} = \pi$$